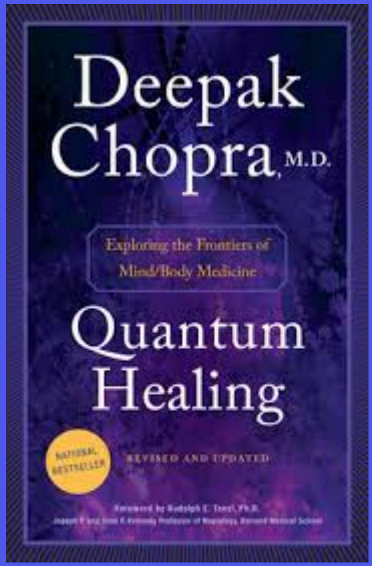
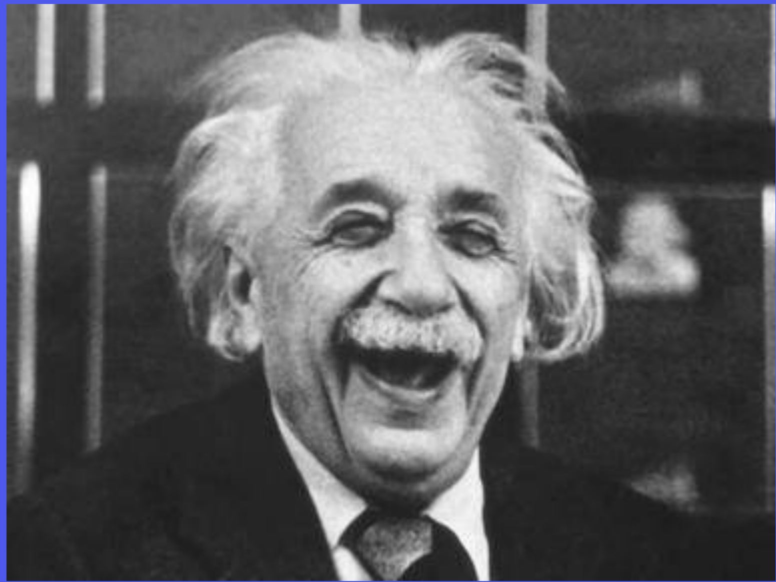
Introducció a la mecànica quàntica

ó

How I Learned to Stop Worrying and Love the Quantum Mechanics

Quantum healing ??!?

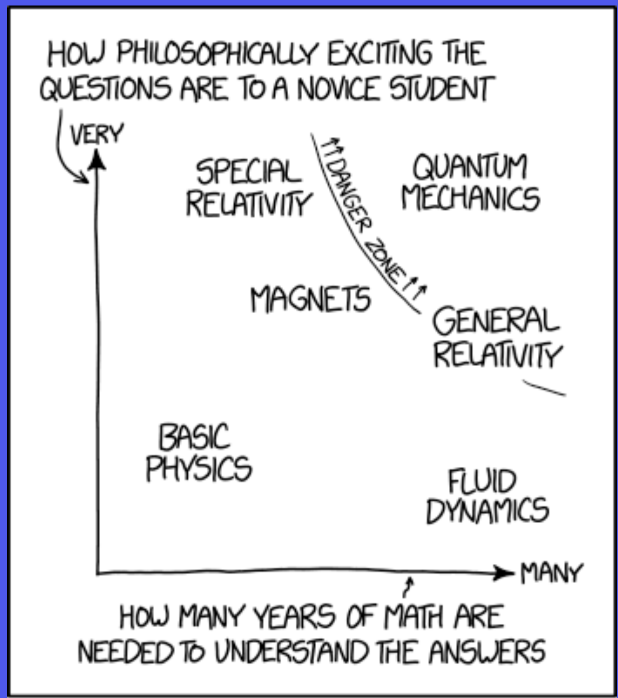




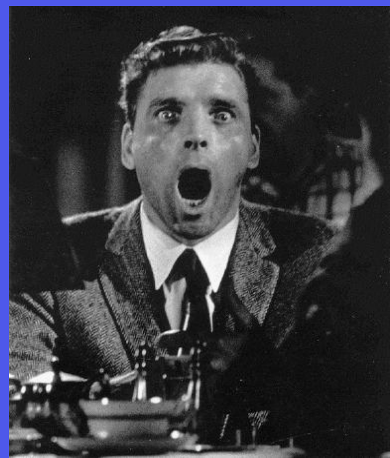
... bajanades quàntiques!

https://xkcd.com

Randall Munroe



WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

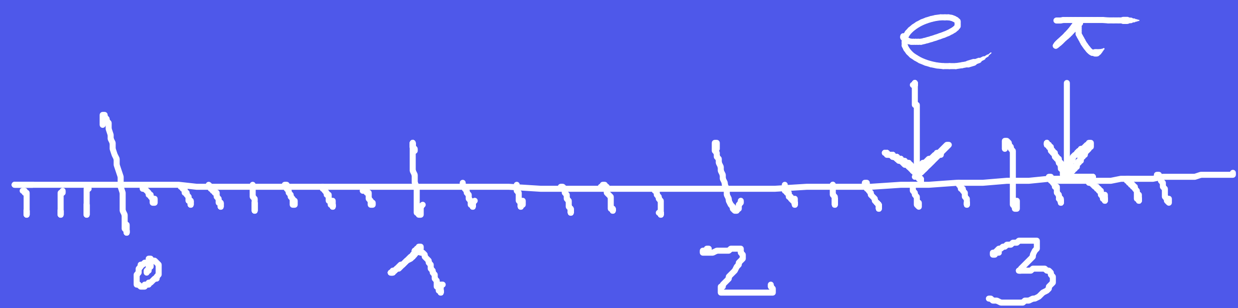


ho sento, necessitem mates

rudiments matemàtics de la física quàntica

Vells coneguts !

$\mathbb{R}$



Quines solucions té aquesta equació?

$$x^2 - 1 = 0$$

mmm mmm...

$$1^2 - 1 = 0 \qquad (-1)^2 - 1 = 0$$

i per aquesta? $x^2 + 1 = 0$

mmmmmmmmmmm... zzzzzzz

$\mathbb{R}$ no conté totes les solucions de:

$$0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

FÀCIL, afegim el que falta!

$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

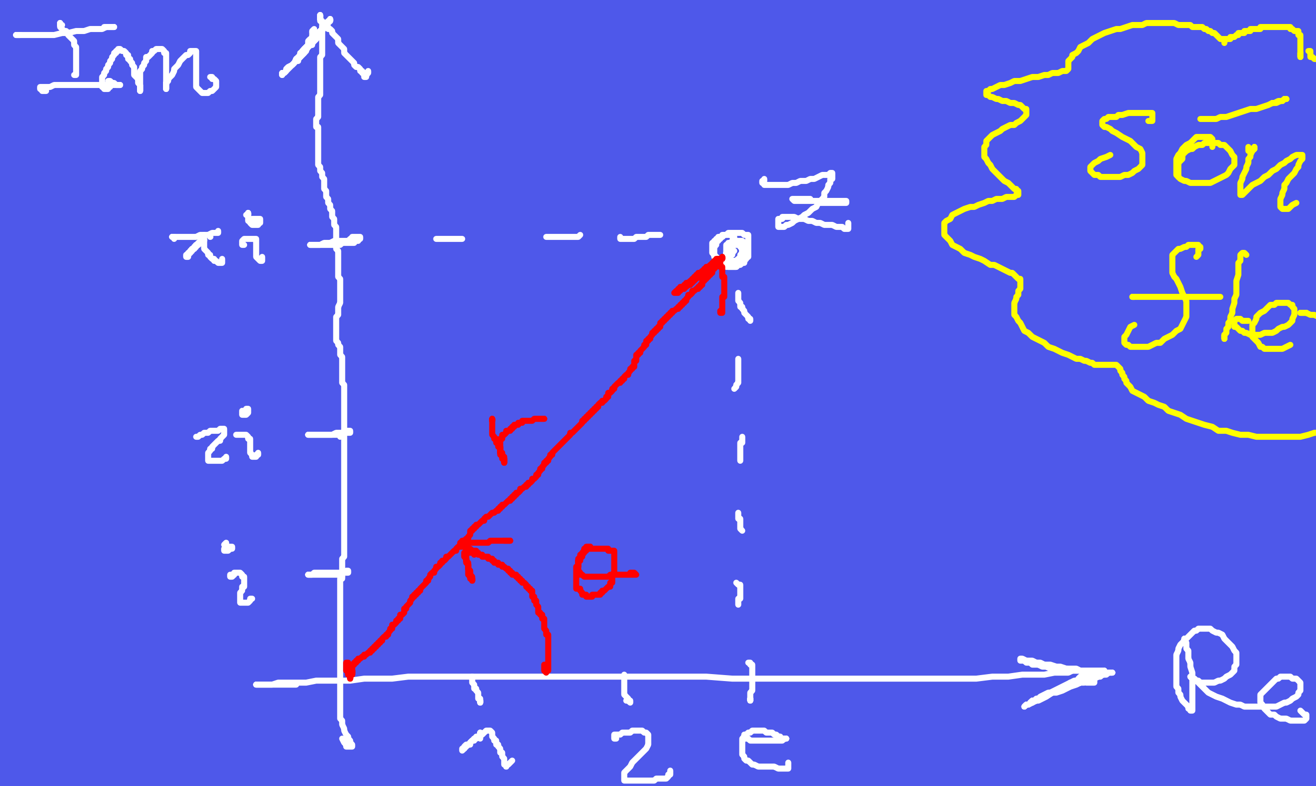
$$(i)^2 + 1 = 0 \qquad (-i)^2 + 1 = 0$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Els nombres complexos són pura abstracció ...

però molt útils, he he!

Interpretació geomètrica de l'àlgebra complexe:



Són fletxetes!

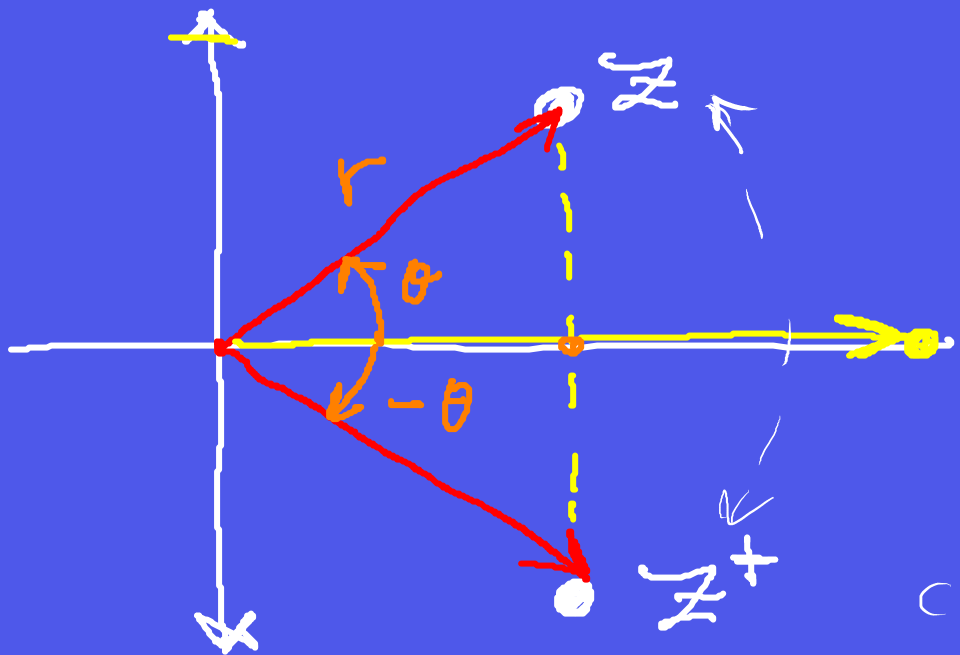
r = longitud o <u>mòdul</u>

θ = angle amb Re o <u>fase</u>

Fem operacions entre z's:

$*\ (a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+i(b+b')$

$*\ (a+bi)\cdot(a'+b'i)=a\cdot a'-b\cdot b'+\dots$ es fa llarg



$z+z^*=2r\cos\theta$

$z-z^*=2r\sin\theta$

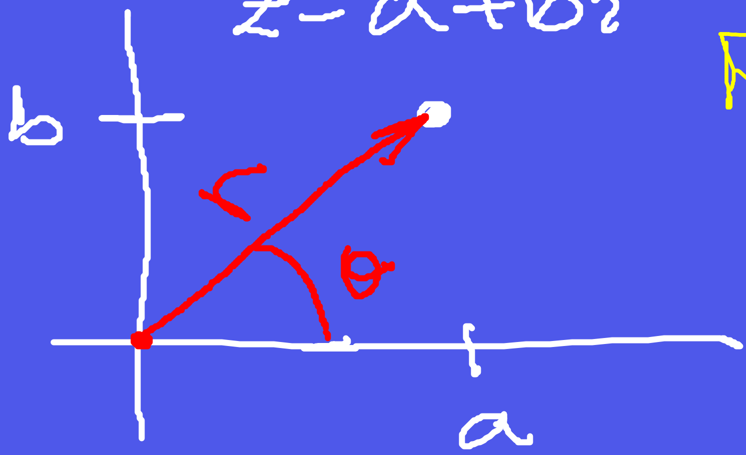
complexe conjugat

$\Longleftrightarrow$

mirall respecte Re

Leonhard Euler

$z = a + bi$



$$z = r e^{i\theta}$$

* si sabem operar amb exponents sabem operar amb z's

* $Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta} = z + z'$

* $Ae^{i\alpha} \cdot Be^{i\beta} = ABe^{i(\alpha+\beta)}$

ja podem multiplicar complexes "fàcilment"

$$z \cdot z^{+} = Ae^{i\alpha} \cdot Ae^{-i\alpha} = A \cdot A \cdot \underbrace{e^{i0}}_{=1} = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{z \cdot z^{+}}$$

el complexe conjugat permet calcular el mòdul de z

Quin és el mòdul d'una suma de dos complexes?

$$|z_a+z_b|^2 = \overbrace{(Ae^{i\alpha}+Be^{i\beta})}^{z_a+z_b}\cdot\overbrace{(Ae^{-i\alpha}+Be^{-i\beta})}^{z_a^*+z_b^*}$$

$$= A^2+B^2+\underbrace{ABe^{i(\alpha-\beta)}+ABe^{-i(\alpha-\beta)}}$$

$$= A^2+B^2+\underbrace{AB\left(e^{i\Delta}+e^{-i\Delta}\right)}$$

← això ha sortit abans

$$= A^2+B^2+AB\cdot 2\cdot\cos\Delta$$

Amb els complexes podem descriure fenòmens ondulatoris: p.ex. corrent altern

$$\theta = \omega t$$

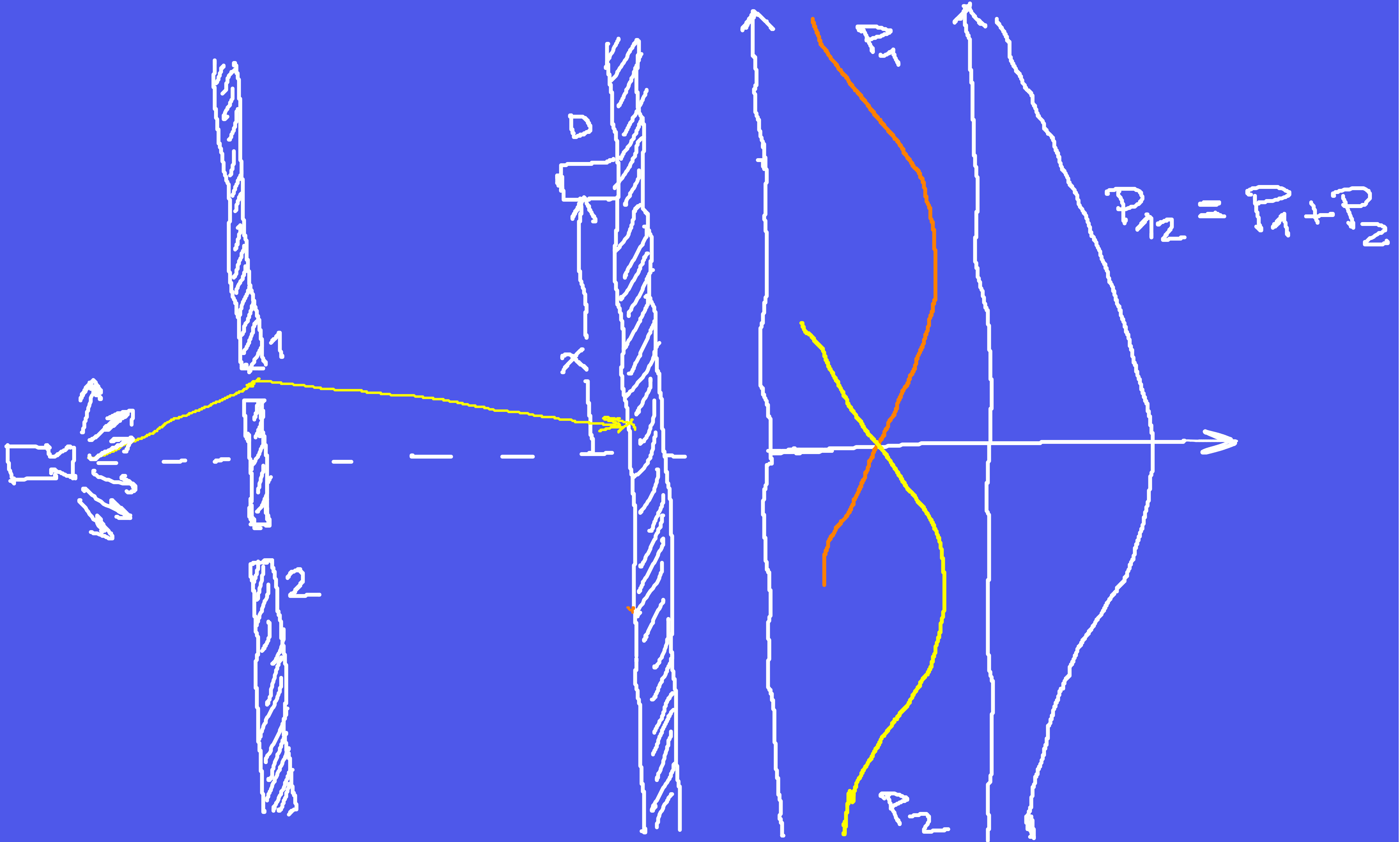
$$V(t) = \mathrm{Im}(V_0 e^{i\omega t}) = V_0 \sin \omega t$$

O.M.G!

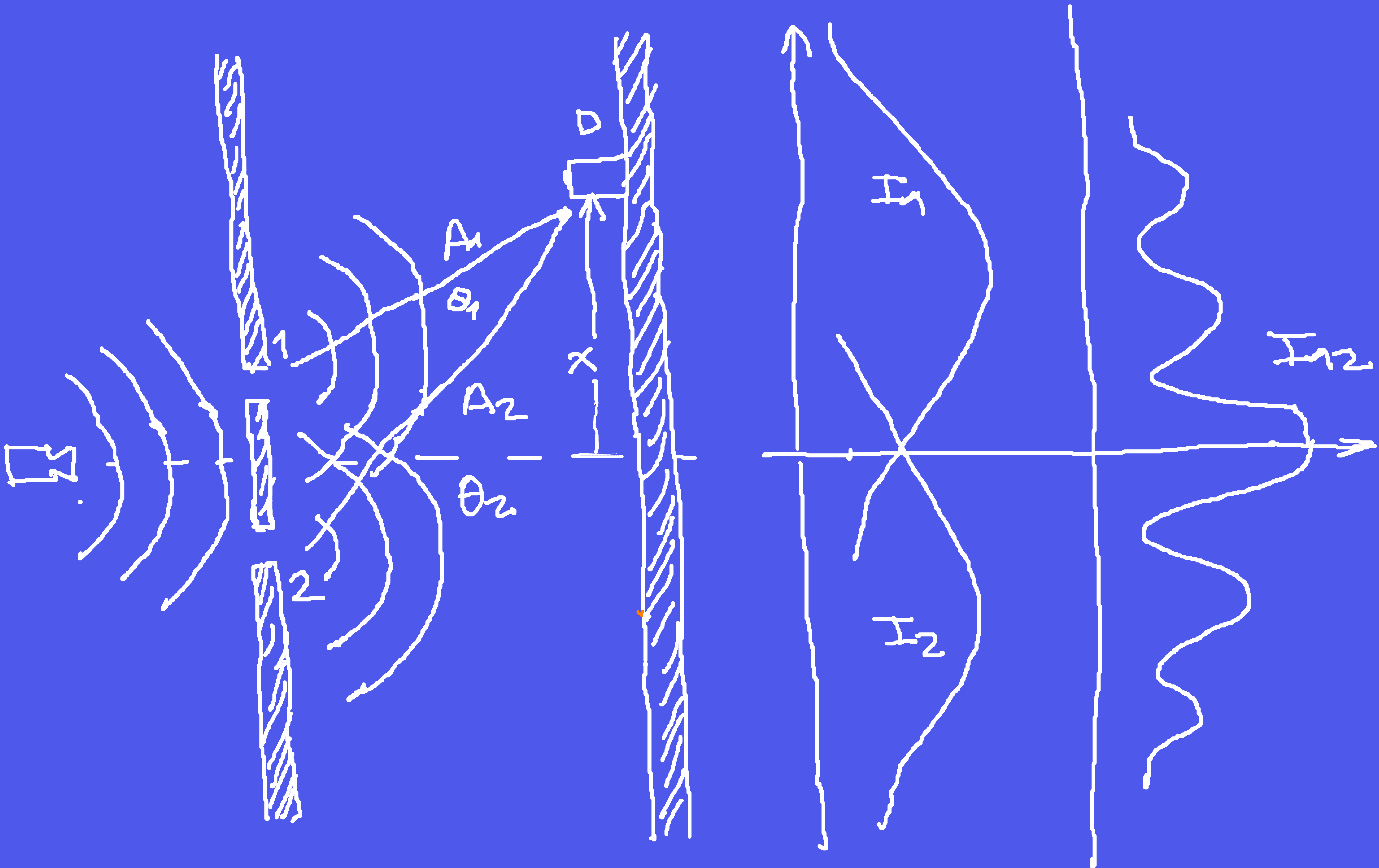
Lectures on Physics, Vol. III

Richard Feynman

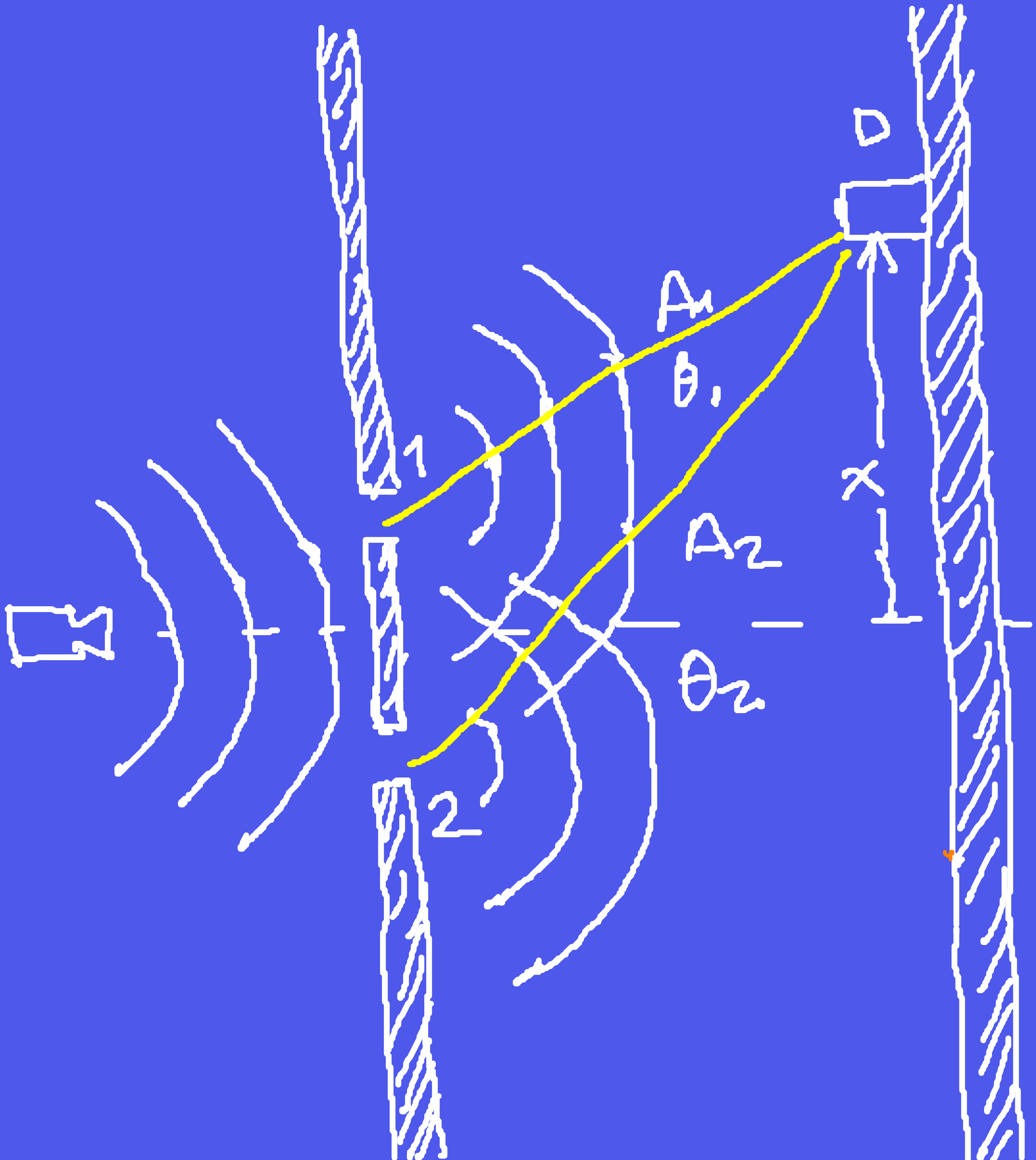
Experiment with bullets:



Experiment amb ones:



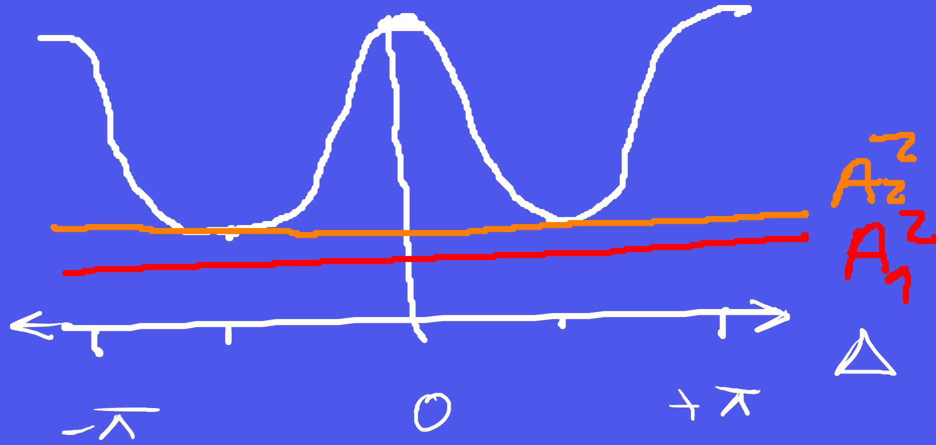
Experiment amb ones:



$$I = |A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2}|^2$$

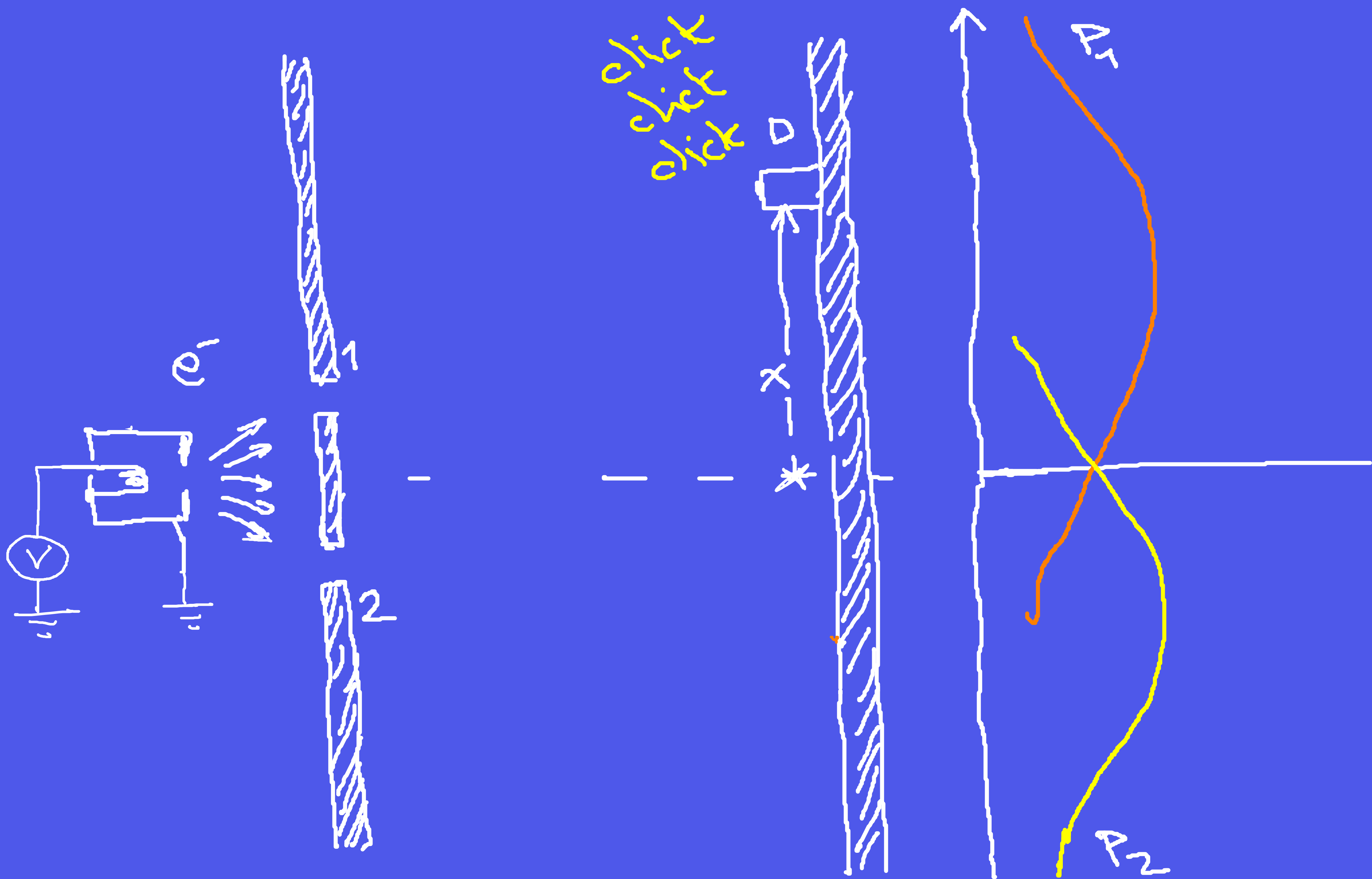
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta$$

no hem vist abans

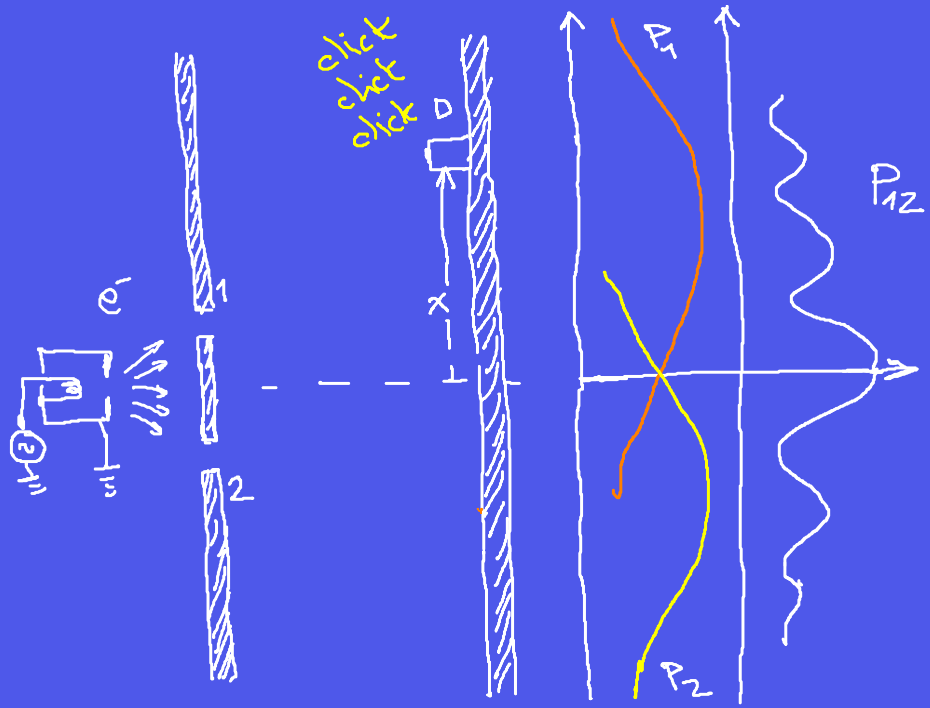


$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta$$

Experiment amb electrons:



Experiment amb electrons:



* Detectem un click per cada electró, per tant han de passar per 1 o per 2.

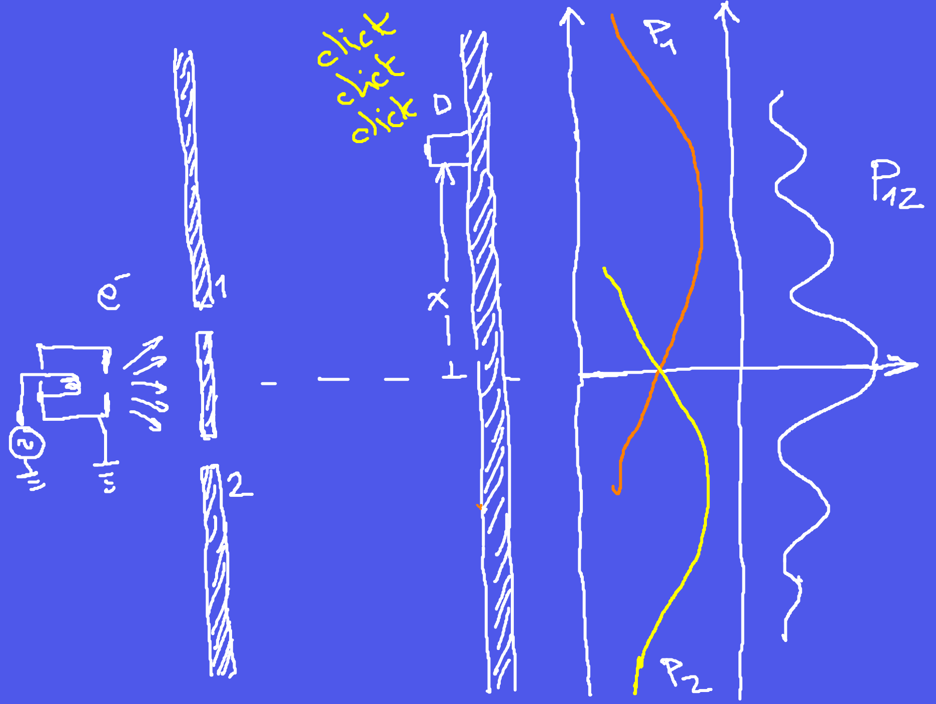
Esperem: $P_{12} = P_1 + P_2$

Però observem $P_{12} \neq P_1 + P_2$

Els e^- no es comporten com les bales, s'assemblen més a les ones.

(primera conclusió boja)

Experiment amb electrons :



Trobar P_{12} és senzill si proposem això :

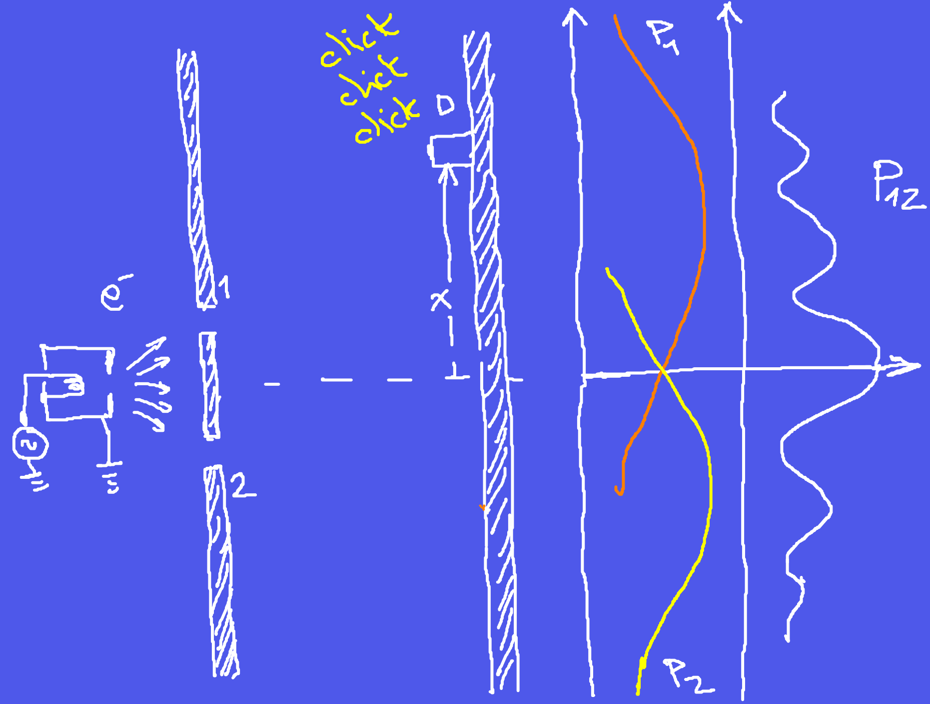
* Existeix un ϕ_1 i un ϕ_2 complexes tals que :

$$P_1 = |\phi_1|^2 = \phi_1 \cdot \phi_1^+$$

$$P_2 = |\phi_2|^2 = \phi_2 \cdot \phi_2^+$$

ϕ_k són les amplituds de probabilitat de trobar un e^- a x si passa pel forat k

Experiment amb electrons:



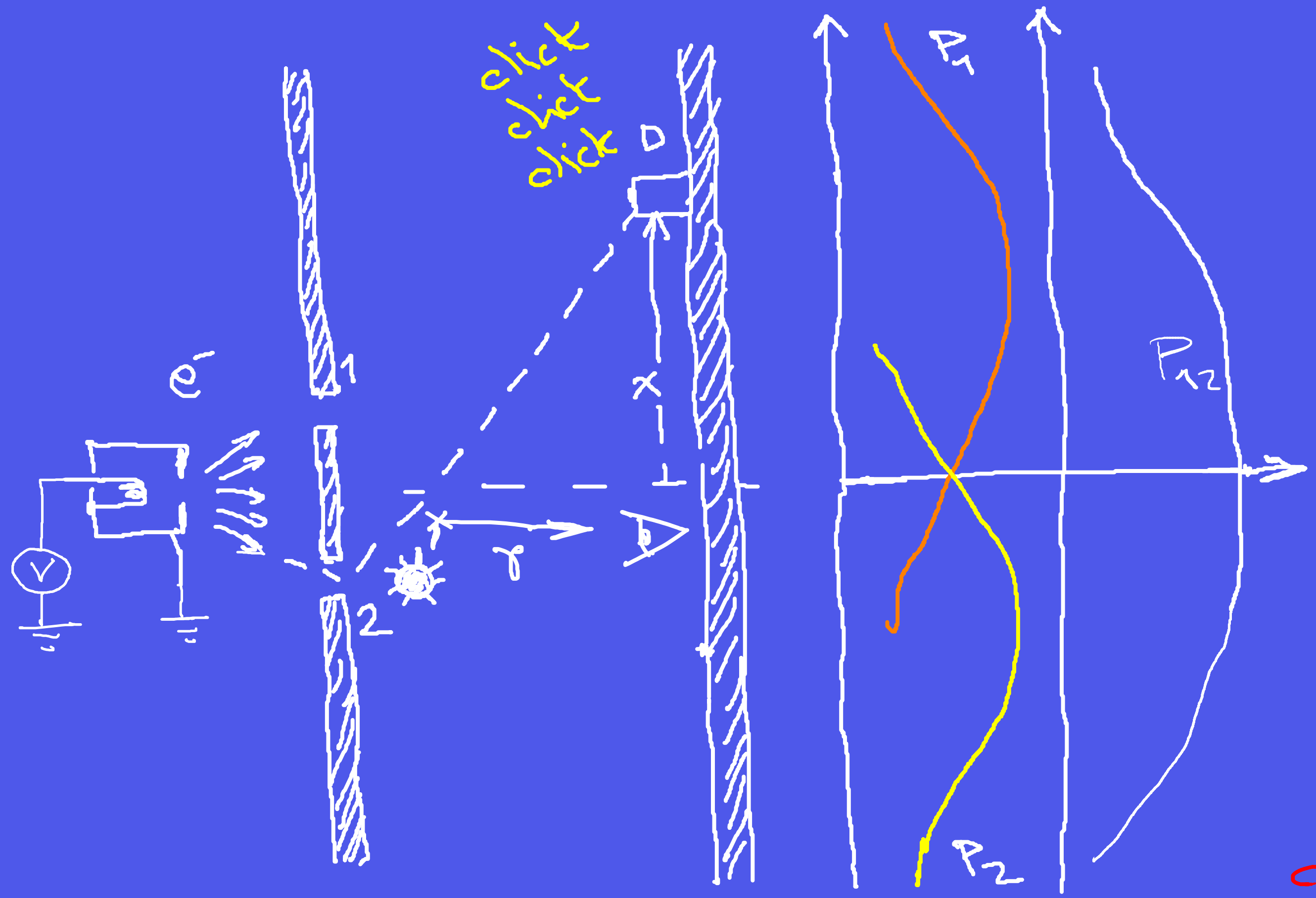
Si els dos camins són possibles:

* sumem amplituds, no probabilitats

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

OK! però per on passa "realment" l'e^-?

Experiment amb electrons:



Quan observem el γ dispersat per l'e^-, el patró d'interferència desapareix.

(segona conclusió boja)

la natura no ens deixa saber per quin camí segueix l'e^- sense alterar les seves amplituds

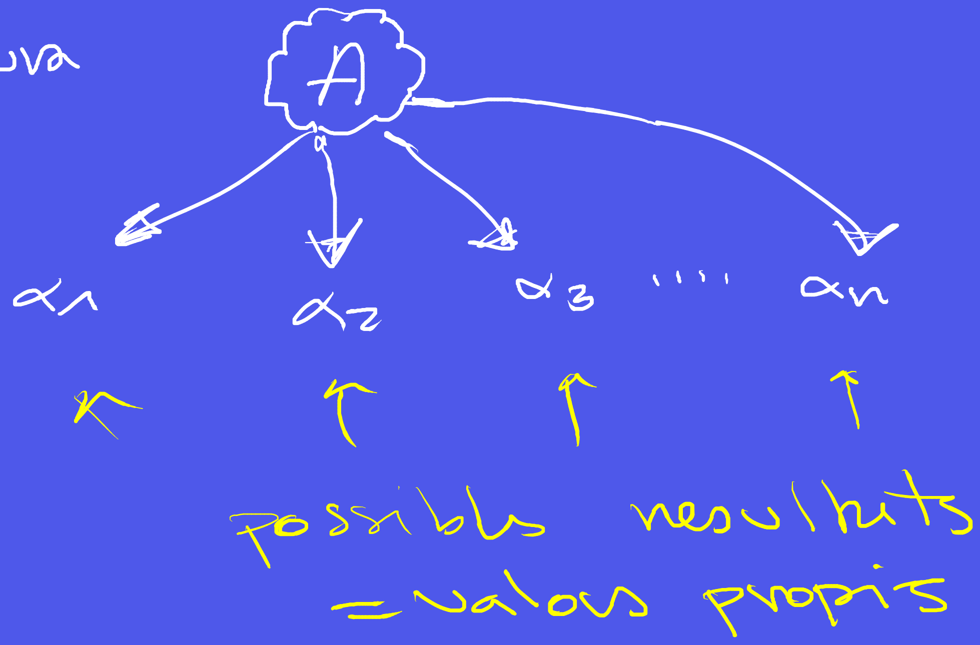
Werner Heisenberg

el pare del gat

Paul Dirac

Axiomes de la M.Q.:

- Tot sistema quàntic ve completament definit per un element d'un espai de Hilbert
- Observables venen donats per transformacions A hermítiques
- Els valors mesurables són valors propis de l'observable
- Un cop feta una mesura el sistema colapsa a un estat propi



Notació de Dirac

$|\phi\rangle$ "ket"

$\langle\phi|$ "bra"

$\langle\phi|\phi\rangle = 1$

$$\left.\begin{aligned} A|\phi_1\rangle &= \alpha_1|\phi_1\rangle \\ A|\phi_2\rangle &= \alpha_2|\phi_2\rangle \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nivells d'energia o el que sigui sempre a $\mathbb{R}$

$|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots$

estat d'un sistema quàntic sota la base $|\phi_i\rangle$:

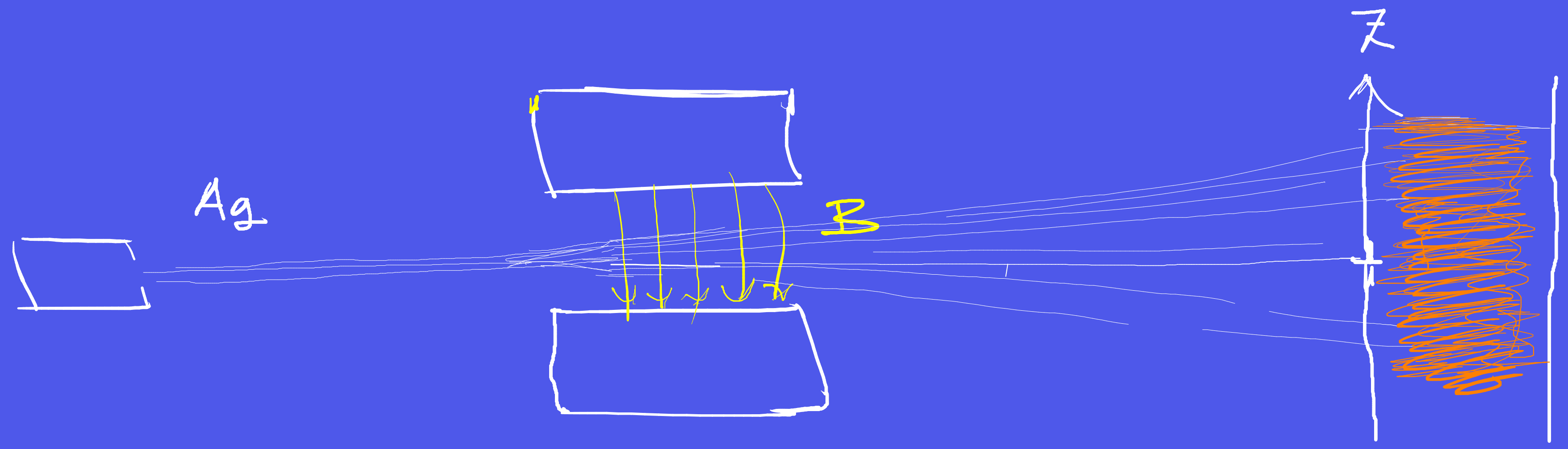
base d'estats propis

$$|\phi\rangle = \langle\phi_1|\phi\rangle|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi\rangle|\phi_2\rangle + \ldots$$

amplituds de probabilitat

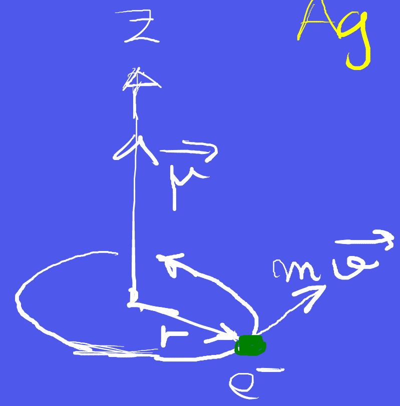
$$\Rightarrow \sum_i \langle\phi_i|\phi\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle^+ = 1$$

Experiment Stern-Gerlach (1922)



$$\vec{F} = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{\mu} = \frac{dB_z}{dz} \mu_z \hat{z}$$

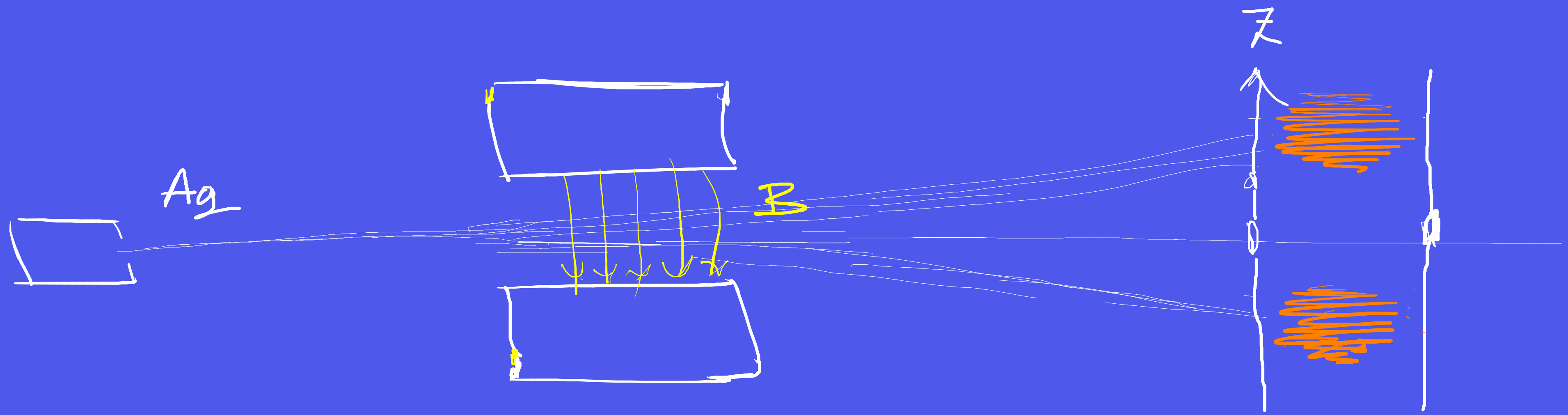
Ag són petits imants



$$\vec{\mu} = I\vec{S} = -g \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Newton $\Rightarrow g_e = 1$

Experiment Stern-Gerlach (1922)



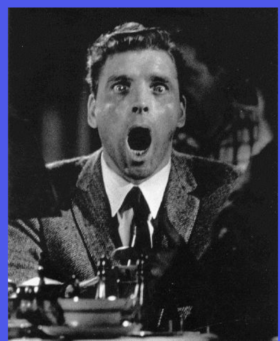
Coses clàssicament inexplicables:

- Els e^- tenen moment spin $\nearrow +\hbar/2$, $\searrow -\hbar/2$
- Factor de Landé $g_e = 2$
- Hi ha un moment intrínsec de l'e^- spin

no tenia cap sentit!

Sembla que tot i no tenir "radi" l'e^- té estructura interna que causa moment d'spin

Això és humanament incomprensible la única manera de tractar-ho és amb matemàtiques!



Considerem els observables d'spin

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

$|+z\rangle$ estat d'e⁻ quan mesurem $+\hbar/2$

$|-z\rangle$ " " " $-\hbar/2$

$$S_z|+z\rangle = \frac{\hbar}{2}|+z\rangle$$

$$S_z|-z\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-z\rangle$$

ho sabem dels axiomes

un estat general es pot expressar :

$$\boxed{|\psi\rangle = \alpha|+z\rangle + \beta|-z\rangle}$$

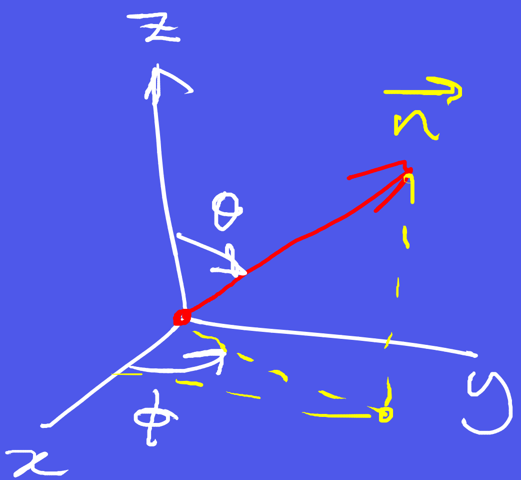
espai Hilbert de dimensió 2

òbviament $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Matrius de Pauli

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = \left\{ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \right\}$$

Què passa si un e^- en estat $|+z\rangle$, li mesurem l'spin en un eix $\vec{u}$ arbitrari?



$$\vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi}\\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Aquest és el nou observable

$$\vec{u} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Després d'uns càlculs ...

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(\cos\theta - 1)a + \sin\theta e^{-i\phi} b = 0$$

$$\sin\theta e^{i\phi} a - (\cos\theta + 1) b = 0$$

$|+n\rangle$ $\quad \theta \neq 0, \pi, \ldots$

$$a = b\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta e^{i\phi}} = \frac{2\cos^2\theta/2}{\sin\theta e^{i\phi}}\, b$$

$$|a|^2 = |b|^2 \cdot \frac{4\cos^4\theta/2}{\sin^2\theta} = |b|^2 \cdot \cancel{4}\, \frac{\cos^{\cancel{4}\,2}\theta/2}{\cancel{4}\sin^2\theta/2\, \cancel{\cos^2\theta/2}}$$

$$= |b|^2 \frac{\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2} \Rightarrow |b|^2 \cdot \frac{\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2} + |b|^2 = 1$$

$$|b|^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2\theta/2} \right\} = 1 \Rightarrow |b|^2 = \sin^2\theta/2 \Rightarrow |a|^2 = \cos^2\theta/2$$

$$\left.\begin{aligned} a &= |a| e^{i\alpha} \\ b &= |b| e^{i\beta} \end{aligned}\right\} \quad \sin\theta e^{i\phi} \cos\theta/2\, e^{i\alpha} - 2\cos^2\theta/2 \cdot \sin\theta/2\, e^{i\beta} = 0$$

$$\cancel{2\sin\theta/2}\,\cancel{\cos\theta/2}\, e^{i\alpha} e^{i\phi} = \cancel{2\cos^2\theta/2} \cdot \cancel{\sin\theta/2}\, e^{i\beta}$$

$$e^{i\alpha} e^{i\phi} = e^{i\beta}$$

$$\alpha + \phi = \beta$$

exemple: $\alpha = -\frac{\phi}{2}$ $\beta = \frac{\phi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{S}\cdot\vec{n}\,|+n\rangle &= \frac{\hbar}{2}|+n\rangle \\ \vec{S}\cdot\vec{n}\,|-n\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|-n\rangle \end{aligned}\right\}$$

$$|+n\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2}|+z\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2}|-z\rangle$$

$$|-n\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\, i e^{-i\phi/2}|+z\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\, i e^{i\phi/2}|-z\rangle$$

Però ens interessa expressar $|+z\rangle$ en termes de la nova base $|+n\rangle$ i $|-n\rangle$

$$\boxed{\langle +n|+z\rangle = \langle +z|+n\rangle^{*} = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(+n|+z) &= \cos^2\theta/2 \\ P(-n|+z) &= \sin^2\theta/2 \end{aligned}}$$

	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
$P(+n\|+z)$	1	0,5
$P(-n\|+z)$	0	0,5